PART2 期待値

要点① 期待値

1000本中1本が当たりのくじで，その賞金が10000円であるとき，くじ1本あたりの賞金額の平均は

$$10000 \div 1000 = 10 \ (\text{円})$$

である。この式は

$$10000 \div 1000 = 10000 \times \frac{1}{1000}$$

と表すことができる。

10000は賞金額であり，$\frac{1}{1000}$ は，このくじを1本引いたときの当たりくじを引く確率であるから，このくじ1本あたりの賞金額の平均は，賞金額とそれが当たる確率の　　と考えることができる。

同様に，1000本のくじがあり，賞金および本数が右の表であるとき，くじ1本あたりの賞金額の総額は

$$10000 \times 1 + 2000 \times 3 + 0 \times 996 = 16000 \ (\text{円})$$

であるから，くじ1本あたりの賞金額の平均は

$$16000 \div 1000 = 16 \ (\text{円})$$

である。ここで

	賞金	本数
1等	10000円	1本
2等	2000円	3本
はずれ	0円	996本
合計		1000本

$$16000 \div 1000 = (10000 \times \quad + 2000 \times \quad + 0 \times \quad\quad) \times \frac{1}{1000}$$

$$= \quad\quad \times \frac{\quad}{1000} + \quad\quad \times \frac{\quad}{1000} + \quad \times \frac{\quad}{1000}$$

と表すことができることから，このくじ1本あたりの賞金額の平均は，賞金額とそれが当たる確率の　　をすべて足し合わせたものと考えることができる。

一般に，ある試行によって起こる事象 A_1，A_2，……，A_n が互いに排反事象で，これらの事象が起こる確率をそれぞれ p_1，p_2，……，$p_n\,(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1)$ とする。

また，A_1，A_2，……，A_n が起こるとき，変量 X がそれぞれ x_1，x_2，……，x_n という値をとるとする。このとき

$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

を変量 X の「　　　　　」という。

期待値

変量 X のとりうる値を x_1，x_2，……，x_n とし，それぞれの値をとる確率を p_1，p_2，……，p_n とすると，期待値 E は

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	……	x_n	計
確率	p_1	p_2	……	p_n	1

例　1個のさいころを投げるとき，出る目の期待値を求める。

1 ～ 6 のどの目が出る確率も $\frac{1}{6}$ であるから，出る目の期待値は

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\ (=3.5)$$

結果が偶然に左右されるような不確実な事柄において，意思決定の基準として期待値を利用することができる。例えば，あるゲームの参加料が 1000 円であるとして，そのゲームに参加したときにもらえる金額の期待値を計算すると 900 円であったとすると，もらえる金額の期待値が参加料よりも　　　　　から，このゲームに参加することは得である　　　　　　　。

2 赤玉2個，白玉3個が入った袋から，同時に2個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2) 赤玉1個につき100円をもらえるとき，1回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

Point Pickup

期待値

変量Xのとりうる値と，Xがそれらの値をとる確率が右の表の通りであるとき，Xの期待値Eは

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

第6講 PART2 確認問題

赤玉2個，白玉4個が入った袋から，同時に2個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

1 赤玉の個数の期待値を求めよ。

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$（個）

2 赤玉1個につき100円もらえるとき，1回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

$\dfrac{\boxed{ウエオ}}{\boxed{カ}}$（円）

PART2 期待値

2 赤玉2個，白玉3個が入った袋から，同時に2個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2) 赤玉1個につき100円をもらえるとき，1回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

[解答]

(1) 取り出した2個の玉に含まれる赤玉の個数は，0，1，2個のいずれかである。

・赤玉が0個となる確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$

・赤玉が1個となる確率は $\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{2\times3}{10}=\dfrac{6}{10}$

・赤玉が2個となる確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

したがって，求める赤玉の個数の期待値は

$$0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}(0\times3+1\times6+2\times1)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0.8\text{（個）}$$

(2) (1)より，もらえる金額 X と確率は以下

X	0	100	200	計
確率	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	1

したがって，求める金額の期待値は

$$0\times\frac{3}{10}+100\times\frac{6}{10}+200\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}(0\times3+100\times6+200\times1)=\frac{800}{10}=80\text{（円）}$$

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3

[解説]

取り出した2個の玉に含まれる赤玉の個数は，

0，1，2個のいずれかである。

赤玉が0個となる確率は $\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{6}{15}$

赤玉が1個となる確率は $\dfrac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{8}{15}$

赤玉が2個となる確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{15}$

したがって，求める赤玉の個数の期待値は，[A]

$$0\times\frac{6}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}$$ [B]

$$=\frac{1}{15}(0\times6+1\times8+2\times1)=\frac{2}{3}\ (個)$$

[A]　変量 X のとりうる値を $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ とし，X がこれらの値をとる確率を，$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots\cdots,\ p_n$ $(p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n=1)$ とするとき，

$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots\cdots+x_np_n$

を変量 X の期待値という。

[B]　(変量)×(確率) の和で求める。

2

[正解] ウエオ：200，カ：3

[解説]

もらえる金額 X と確率は以下の通り。

X	0	100	200	計
確率	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

[C]

したがって，求める金額の期待値は，

$$0\times\frac{6}{15}+100\times\frac{8}{15}+200\times\frac{1}{15}$$ [D]

$$=\frac{1}{15}(0\times6+100\times8+200\times1)=\frac{200}{3}\ (円)$$

[C]

赤玉が0個となる確率は $\dfrac{6}{15}$

赤玉が1個となる確率は $\dfrac{8}{15}$

赤玉が2個となる確率は $\dfrac{1}{15}$

[D]　(変量)×(確率) の和で求める。